

Applications - Chapitre 13

Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes



A.13.1 Pendule physique

A.13.2 Barre mince en rotation

A.13.1 Pendule physique

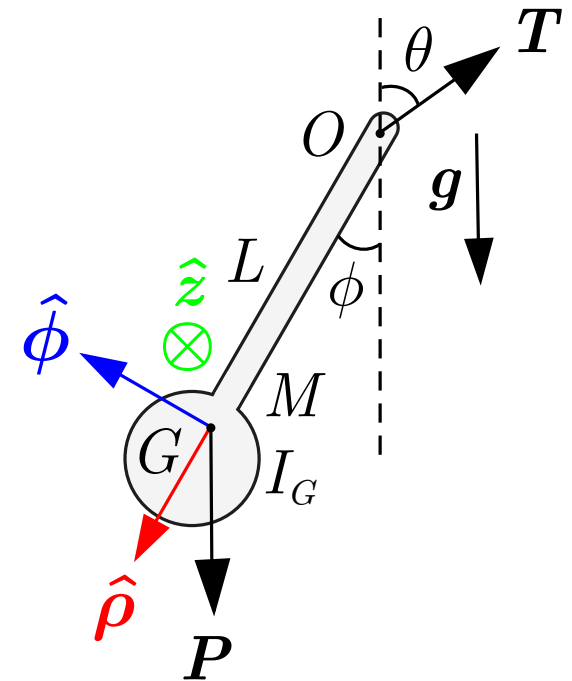
A.13.2 Barre mince en rotation

- Un pendule physique est un balancier constitué d'une barre et d'un cylindre de masse totale M . Le pendule oscille autour d'un axe horizontal qui passe par le point O .
- Soient $\mathbf{OG} = L \hat{\rho}$ le vecteur position du centre de masse G , I_O et I_G , les moments d'inertie du pendule par rapport aux axes horizontaux parallèles qui passent par les points O et G .
- Théorème d'Huygens-Steiner :

$$I_O = I_G + ML^2 \quad (\text{A.13.1})$$

- Pour un solide indéformable, contrairement à un point matériel, la tension $\mathbf{T}$ exercée au point d'attache O n'est pas orientée selon la droite OG qui passe par le centre de masse G (i.e. $\theta \neq \phi$).
- Accélération angulaire :

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \ddot{\phi} \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{A.13.2})$$



- Forces extérieures :

- 1 Poids : en G (A.13.3)

$$\mathbf{P} = M \mathbf{g} = Mg \left(\cos \phi \hat{\boldsymbol{\rho}} - \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \right)$$

- 2 Tension : en O (A.13.4)

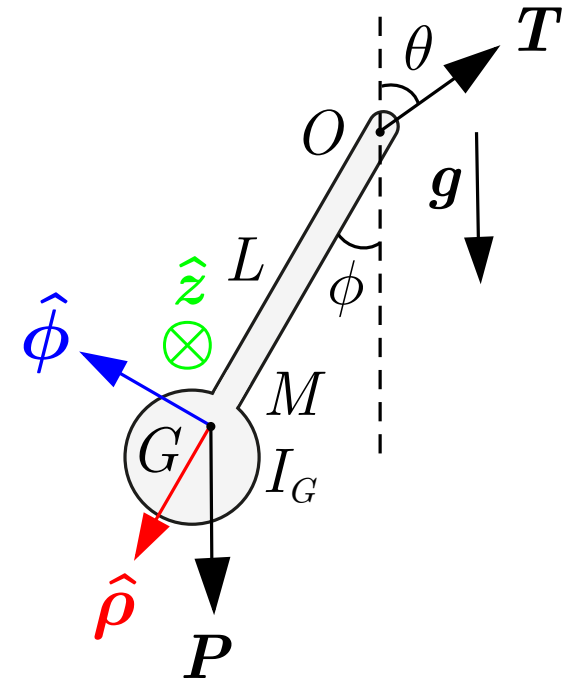
$$\mathbf{T} = -T \left(\cos (\theta - \phi) \hat{\boldsymbol{\rho}} + \sin (\theta - \phi) \hat{\boldsymbol{\phi}} \right)$$

- Théorème du moment cinétique : $\mathbf{L}_O = I_O \boldsymbol{\Omega}$ où $I_O = \text{cste}$

$$\sum \mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \mathbf{OG} \times \mathbf{P} + \underbrace{\mathbf{OO} \times \mathbf{T}}_{=0} = I_O \dot{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\mathbf{L}}_O$$

$$\Rightarrow L \hat{\boldsymbol{\rho}} \times Mg \left(\cancel{\cos \phi \hat{\boldsymbol{\rho}}} - \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) = I_O \ddot{\phi} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\text{selon } \hat{\mathbf{z}} : -MgL \sin \phi = I_O \ddot{\phi} = (I_G + ML^2) \ddot{\phi} \quad (\text{A.13.5})$$



- Equation du mouvement :

$$\ddot{\phi} + \frac{MgL}{I_G + ML^2} \sin \phi = 0 \quad (\text{A.13.6})$$

- Approximation des petits angles : $\sin \phi \simeq \phi$

$$(\text{A.13.6}) \Rightarrow \ddot{\phi} + \omega^2 \phi = 0 \quad (\text{A.13.7})$$

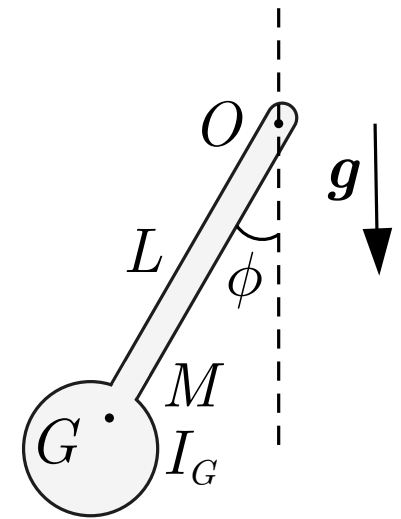
- Pulsation :

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{I_G + ML^2}} \quad (\text{A.13.8})$$

- Période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_G + ML^2}{MgL}} = \sqrt{1 + \frac{I_G}{ML^2}} \left(2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \right) \quad (\text{A.13.9})$$

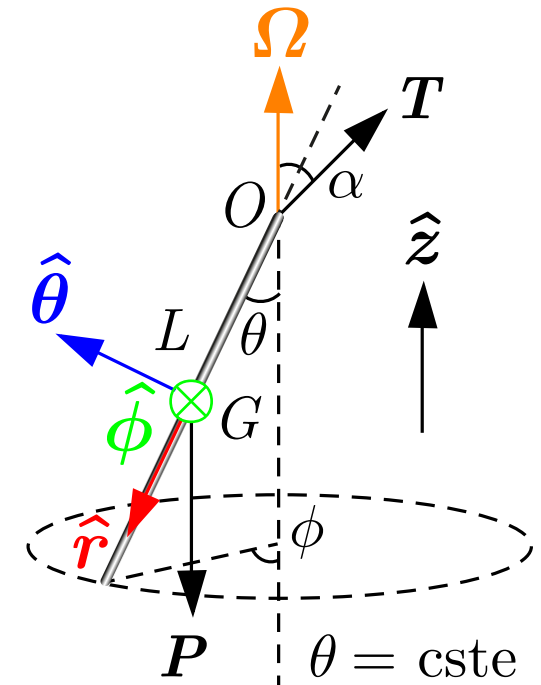
- La période T du pendule physique est plus longue que celle du pendule mathématique de même longueur L (i.e. $I_G = 0$).



A.13.1 Pendule physique

A.13.2 Barre mince en rotation

- Une barre indéformable et homogène de masse M , de longueur L et d'épaisseur négligeable est fixée à l'une de ses extrémité au point O . L'orientation de la barre fait un angle $\theta = \text{cste}$ avec l'axe vertical passant par l'origine O .
- La barre est en rotation sans frottement à vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{z}} = \text{cste}$ autour de l'axe vertical.
- Soit $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}})$ le repère d'inertie sphérique lié à la barre.
- Le moment d'inertie de la barre rapport à l'axe principal d'inertie radial Gr est négligeable, i.e. $I_{G,r} = 0$. Les moments d'inertie de la barre par rapport aux axes principaux d'inertie nodal $G\theta$ et azimutal $G\phi$ sont égaux :



$$I_{G,\theta} = I_{G,\phi} \equiv I_G = \frac{1}{12} M L^2 \quad (\text{A.13.10})$$

- Vitesse angulaire :

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{z}} = \Omega \left(-\cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) \quad (\text{A.13.11})$$

- Forces extérieures :

- 1 Poids : en G

$$\mathbf{P} = M \mathbf{g} = -Mg \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{A.13.12})$$

$$= Mg \left(\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right)$$

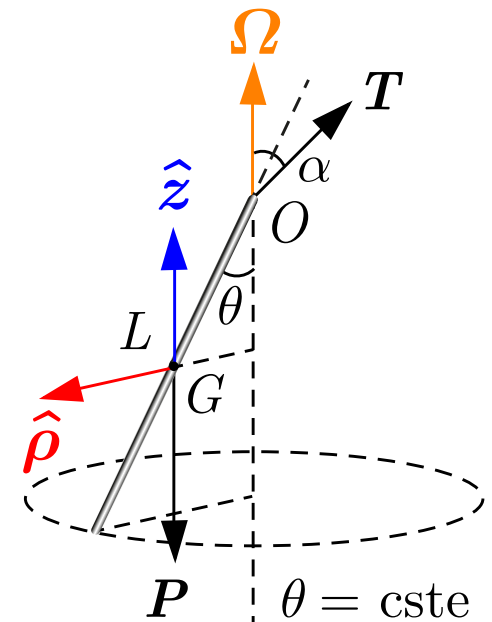
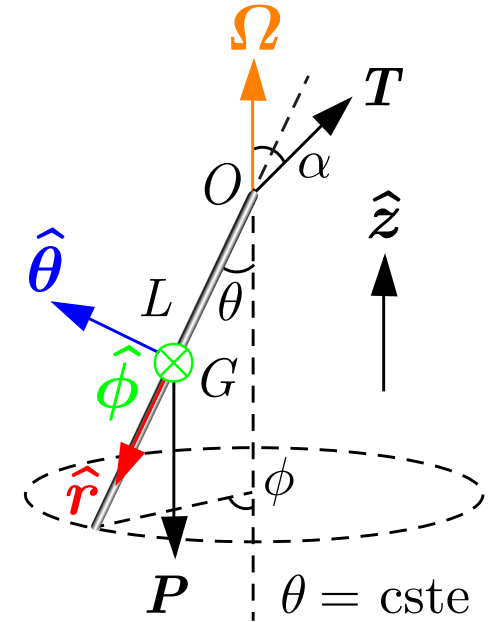
- 2 Tension : en O

$$\mathbf{T} = T \left(-\sin \alpha \hat{\boldsymbol{\rho}} + \cos \alpha \hat{\mathbf{z}} \right) \quad (\text{A.13.13})$$

$$= -T \left(\cos (\alpha - \theta) \hat{\mathbf{r}} + \sin (\alpha - \theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} \right)$$

- Accélération du centre de masse : centripète

$$\mathbf{A}_G = -\frac{L}{2} \sin \theta \Omega^2 \hat{\boldsymbol{\rho}} \quad (\text{A.13.14})$$



- Théorème du centre de masse :

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P} + \mathbf{T} = M \mathbf{A}_G \quad (\text{A.13.15})$$

selon $\hat{\rho}$: $-T \sin \alpha = -M \frac{L}{2} \sin \theta \Omega^2$

selon $\hat{z}$: $-Mg + T \cos \alpha = 0$

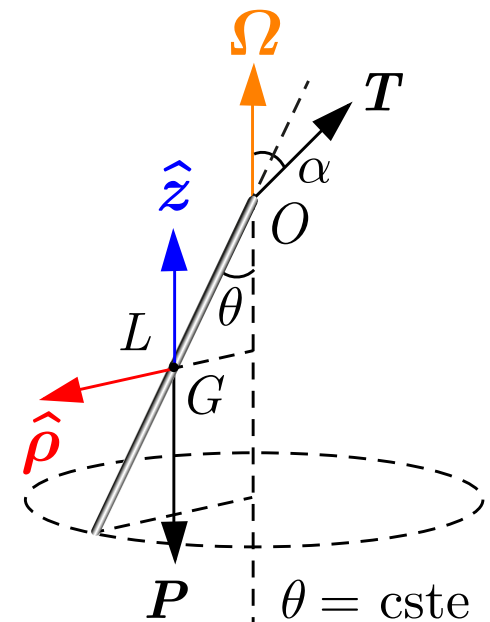
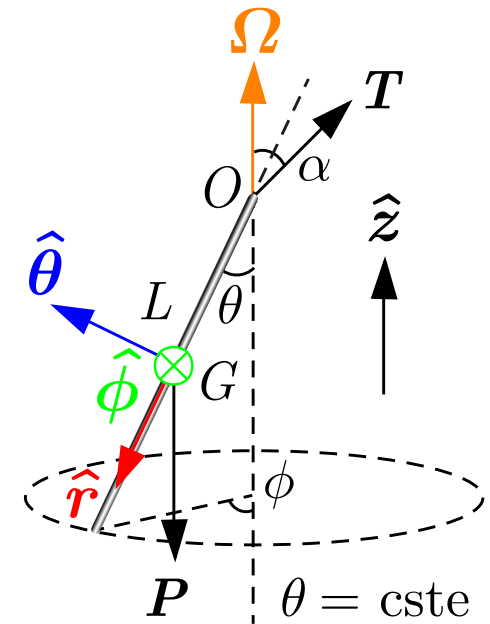
- Composantes de la tension :

$$T \sin \alpha = \frac{1}{2} M L \sin \theta \Omega^2 \quad (\text{A.13.16})$$

$$T \cos \alpha = Mg \quad (\text{A.13.17})$$

- Orientation de la tension : (A.13.16) / (A.13.17)

$$\tan \alpha = \frac{T \sin \alpha}{T \cos \alpha} = \frac{1}{2} \frac{L \Omega^2}{g} \sin \theta \neq \tan \theta \quad (\text{A.13.18})$$



- Moment cinétique : $\mathbf{L}_G = I_G \boldsymbol{\Omega}$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_G &= \underbrace{I_{G,r}}_{=0} \Omega_r \hat{\mathbf{r}} + \underbrace{I_{G,\theta}}_{\equiv I_G} \Omega_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + I_{G,\phi} \underbrace{\Omega_\phi}_{=0} \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ &= I_G \Omega \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned} \quad (\text{A.13.19})$$

- Formule de Poisson :

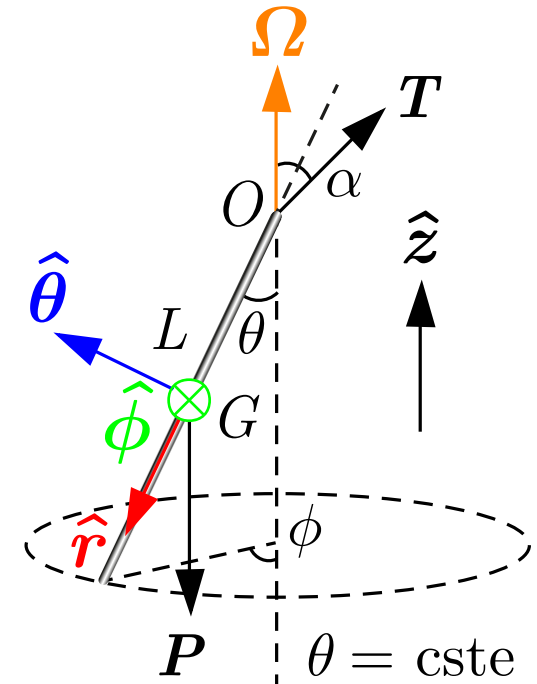
$$\begin{aligned} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} &= \boldsymbol{\Omega} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \Omega (-\cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \cancel{\sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}}) \times \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= -\Omega \cos \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (\text{A.13.20})$$

- Dérivée temporelle du moment cinétique :

$$\dot{\mathbf{L}}_G = I_G \Omega \sin \theta \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -I_G \Omega^2 \sin \theta \cos \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (\text{A.13.21})$$

- Moment de force extérieure : tension en O

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} &= \mathbf{GO} \times \mathbf{T} = \left(-\frac{L}{2} \hat{\mathbf{r}} \right) \times \left(-T \left(\cancel{\cos(\alpha - \theta)} \hat{\mathbf{r}} + \sin(\alpha - \theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} T L \sin(\alpha - \theta) \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (\text{A.13.22})$$



- Théorème du moment cinétique :

$$\sum M_G^{\text{ext}} = \dot{L}_G \quad (\text{A.13.23})$$

selon $\hat{\phi}$: $\frac{1}{2} TL \sin(\alpha - \theta) = -I_G \Omega^2 \sin \theta \cos \theta$

- Formule de trigonométrie :

$$\sin(\alpha - \theta) = \sin \alpha \cos \theta - \cos \alpha \sin \theta \quad (\text{A.13.24})$$

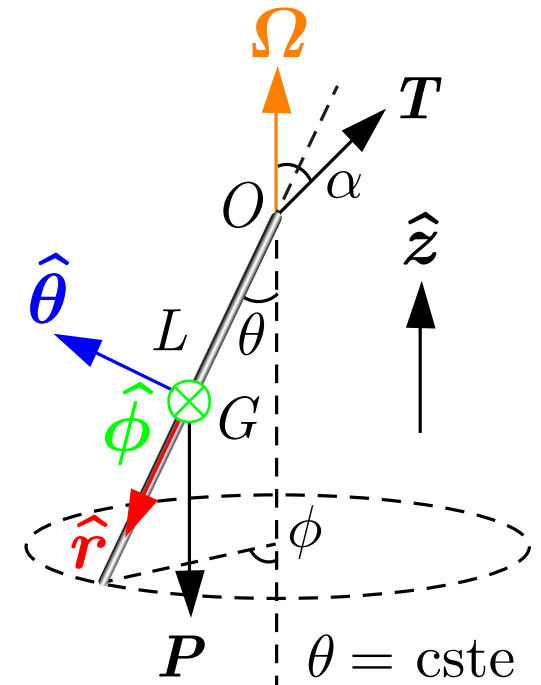
- Théorème du moment cinétique :

$$TL \sin \alpha \cos \theta - TL \cos \alpha \sin \theta = -2 I_G \Omega^2 \sin \theta \cos \theta \quad (\text{A.13.25})$$

- Théorème du centre de masse : $(\text{A.13.16}) \cdot L$ et $(\text{A.13.17}) \cdot L$

$$TL \sin \alpha = \frac{1}{2} ML^2 \sin \theta \Omega^2 \quad \text{et} \quad TL \cos \alpha = MgL \quad (\text{A.13.26})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} ML^2 \sin \theta \cos \theta \Omega^2 - MgL \sin \theta = -2 I_G \Omega^2 \sin \theta \cos \theta \quad (\text{A.13.27})$$



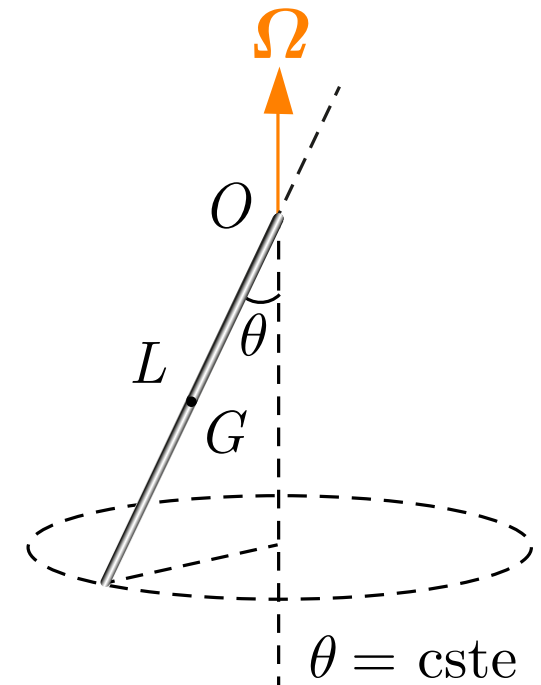
- Equation du mouvement : (A.13.27) / $\sin \theta$

$$\left(\frac{1}{2} M L^2 + 2 I_G \right) \Omega^2 \cos \theta = M g L \quad (\text{A.13.28})$$

- Orientation de la barre :

$$\cos \theta = \frac{M g L}{\left(\frac{1}{2} M L^2 + 2 I_G \right) \Omega^2} \quad (\text{A.13.29})$$

- Angle de nutation : $I_G = \frac{1}{12} M L^2$



$$\theta = \arccos \left(\frac{1}{1 + \frac{4 I_G}{M L^2}} \frac{g}{\frac{L}{2} \Omega^2} \right) = \arccos \left(\frac{3}{4} \frac{g}{\frac{L}{2} \Omega^2} \right) \quad (\text{A.13.30})$$

Pour $I_G = 0$, on retrouve l'angle d'inclinaison vertical θ d'un pendule cône de masse M , de longueur $L/2$ tournant à vitesse angulaire Ω .